1 Schrittweises Vorgehen zur Lösung von Polynomen 3. Grades mittels den *Caradischen Formeln*

1. Die Gleichung 3. Grades wird, falls nötig, durch Division des Koeffizienten A auf die *Normalform* gebracht.

$$\begin{aligned} Ax^3 + Bx^2 + Cx + D &= 0 \qquad \text{(allgemeine Form)} \qquad (1)\\ x^3 + ax^2 + bx + c &= 0 \qquad \text{(Normalform)} \qquad (2) \end{aligned}$$

2. Durch Substitution der Variablen x durch $z - \frac{a}{3}$ fällt das quadratische Glied weg. Man erhält ein *reduziertes kubisches Polynom*.

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= 0\\ (z - \frac{a}{3})^3 + a \cdot (z - \frac{a}{3})^2 + b \cdot (z - \frac{a}{3}) + c &= 0\\ \left[z^3 - 3z^2(\frac{a}{3}) + 3z(\frac{a}{3})^2 - (\frac{a}{3})^3\right] + a \cdot \left[z^2 - 2z(\frac{a}{3}) + (\frac{a}{3})^2\right] + b \cdot \left[z - (\frac{a}{3})\right] + c &= 0\\ z^3 + [a - a]\, z^2 + \left[3(\frac{a}{3})^2 - 2(\frac{a^2}{3}) + b\right] z + \left[-(\frac{a}{3})^3 + a(\frac{a}{3})^2 - b(\frac{a}{3}) + c\right] &= 0\\ z^3 + 0z^2 + \underbrace{\left[b - (\frac{a^2}{3})\right]}_{p} z + \underbrace{\left[\frac{2a^3 - 9ab}{27} + c\right]}_{q} &= 0\\ z^3 + pz + q &= 0 \end{aligned}$$

3. Berechnung der Diskriminante

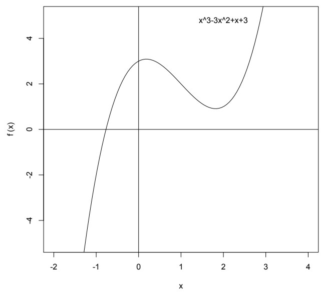
$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \qquad (3)$$

4. Je nach Betrag und Vorzeichen der Diskriminante sind die Lösungen aus unterschiedlichen Kombinationen der folgenden Terme zu erhalten:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \qquad \text{und} \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \qquad (4)$$

   (a) $D > 0$

$$\begin{aligned} z_1 &= u + v \qquad (5)\\ z_{2,3} &= -\frac{u+v}{2} \pm \frac{u-v}{2} i\sqrt{3} \qquad (6) \end{aligned}$$

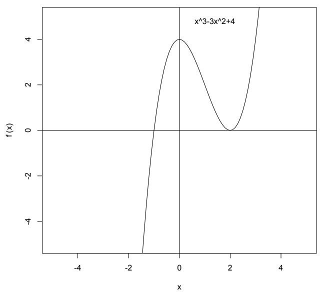


(b) $D = 0$ Es sind zwei Fälle möglich.

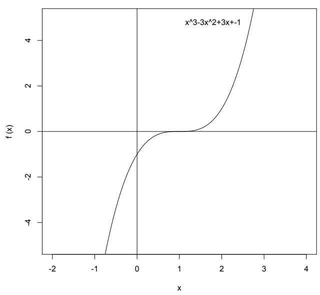
- Im 1. Fall hat die kubische Gleichung eine einfache reelle Lösung z_1 und eine doppelte reelle Lösung $z_{2,3}$.

$$z_1 = 2\,u = 2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \underbrace{\sqrt{D}}_{=0}} = \sqrt[3]{-4q} \tag{7}$$

$$z_{2,3} = -u = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \tag{8}$$



- Im 2.Fall hat die kubische Gleichung eine dreifache Lösung $z_{1,2,3}$.



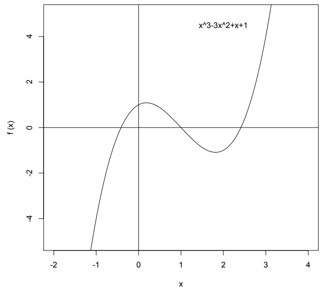
Wenn $p = q = 0$ so ist $z_{1,2,3} = 0$ die einzige dreifache Lösung.

(c) $D < 0$ (*casus irreducibilis*)

$$z_2 = -\sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{q}{2} \cdot \sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right) + \frac{\pi}{3}\right) \tag{9}$$

$$z_1 = \sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{q}{2} \cdot \sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right)\right) \tag{10}$$

$$z_3 = -\sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{q}{2} \cdot \sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right) - \frac{\pi}{3}\right) \tag{11}$$



5. Rücksubstitution

$$x_0 = z_0 - \frac{a}{3} \tag{12}$$

2 Übungen

Bestimme alle Nullstellen der folgenden kubischen Polynome unter Verwendung der cardanischen Formeln.

1. $x^3 - 3x^2 + 4$
2. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
3. $x^3 - 3x^2 + x + 3$
4. $x^3 - 3x^2 + x + 1$

3 Lösungen

1.

$$\begin{aligned} p &= (-3) \\ q &= 2 \\ D &= 0 \\ z_1 &= (-2) \\ z_{2,3} &= 1 \\ x_1 &= (-1) \\ x_{2,3} &= 2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
p &= 0 \\
q &= 0 \\
D &= 0 \\
z_{1,2,3} &= 0 \\
x_{1,2,3} &= 1
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
p &= (-2) \\
q &= 2 \\
D &= \frac{19}{27} = 0.7037 \\
z_1 &= -1.7693 \\
z_{2,3} &= 0.8846 \pm 0.3405\, i\, \sqrt{3} = 0.8846 \pm 0.5897\, i \\
x_1 &= (-0.7693) \\
x_{2,3} &= 1.8846 \pm 0.3405\, i\, \sqrt{3} = 1.8846 \pm 0.5897\, i
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
p &= (-2) \\
q &= 0 \\
D &= -\frac{8}{27} = -0.2963 \\
z_1 &= \sqrt{2} = 1.4142 \\
z_2 &= 0 \\
z_3 &= -\sqrt{2} = -1.4142 \\
x_1 &= 1 + \sqrt{2} = 2.4142 \\
x_2 &= 1 \\
x_3 &= 1 - \sqrt{2} = -0.4142
\end{aligned}$$

Joël Gubler, 27.12.2008